

Метод конечных разностей ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

<http://www.kimrt.ru>

Онлайн-курс

[Суперкомпьютерные технологии в задачах моделирования](http://www.kimrt.ru)

Метод конечных разностей (МКР) – численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами [1]. МКР является сеточным методом.

Разностная схема — это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия (например, краевые условия и/или начальное распределение). Таким образом, разностные схемы применяются для сведения дифференциальной задачи, имеющей континуальный характер, к конечной системе уравнений, численное решение которых принципиально возможно на вычислительных машинах.

Основные понятия МКР: обусловленность исходной задачи, аппроксимация разностной схемой задачи, устойчивость разностной схемы и сходимость численного решения (к точному решению).

Шаблон — это множество точек, с помощью которых аппроксимируются производные. Примеры шаблонов приведены на рис. 1.

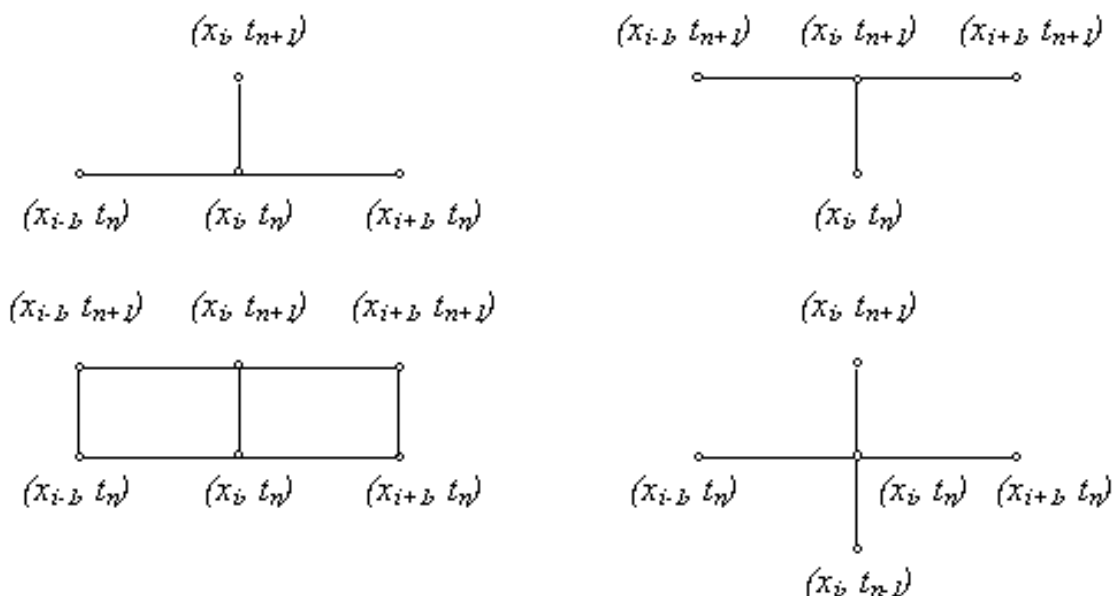


Рис. 1. Схемы некоторых стандартных шаблонов

В качестве примера рассмотрим решение уравнения переноса¹

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) = 0,$$

где U – искомая функция, например, концентрация раствора или температура, и v – это скорость переноса. Здесь предполагается, что v – константа. Кроме того, необходимо задать начальные и граничные условия задачи. В качестве начального условия используем $U(x, t) = U_0(x)$, где U_0 – функция, вид которой нам известен, то есть нам известно начальное распределение температуры или концентрации вдоль пространственной координаты. Задача рассматривается в области $x = [0, l]$ для времени $t = [0, T]$. Предположим, что на границе $x = l$ поддерживается постоянное значение U на протяжении всего процесса. В таком случае используем граничное условие $U(l, 0) = U_l$, где U_l – константа. Запишем разностную схему явный левый уголок [2]

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + v \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} = 0.$$

Из этой схемы можно выразить U_i^{n+1} для дальнейших вычислений. Такая разностная схема будет устойчивой при $v > 0$ и при выполнении условия Куранта $|v| \tau / h \leq 1$. Теперь запишем схему явный правый уголок [2]

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + v \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} = 0.$$

Такая разностная схема будет устойчивой при $v < 0$ и при выполнении условия Куранта. В листинге 1 показан алгоритм расчета по этой схеме на языке Maple.

Листинг 1. Решение уравнения переноса с помощью разностной схемы явный правый уголок

restart :

with(plots) :

with(PDEtools) :

Time := 15.0 :# время процесса

l := 12.0 :# длина области

H := (x) → $\frac{1.0}{1.0 + \exp(-2.0 \cdot x)}$:

#аналитическая функция Хевисайда

¹ В нотации латеха $\frac{\partial}{\partial t} U(x,t) + v \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) = 0$

ul := 20.0 :

*#значение искомой функции на левой границе в
начальный момент*

ur := 40.0 :

*#постоянное значение искомой функции на правой
границе*

v := -1 :#скорость переноса

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) = 0 :$$

eq := % :

*# уравнение переноса, U - температура или
концентрация*

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) - \left(\frac{\partial}{\partial x} U(x, t) \right) = 0$$

$$1 : \# \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + v \cdot \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} = 0$$

1 :

#Схема устойчива при $v < 0$, когда выполняется

$$\text{условие Куранта } \frac{|v| \cdot \tau}{h} \leq 1$$

Ni := 100 :

*# количество отрезков по пространственной
координате*

$$h := \frac{l}{Ni} :$$

u0 := Array(0 ..Ni, fill = 0.0) :# текущий временной слой

u1 := Array(0 ..Ni, fill = 0.0) :

следующий временной слой

1 :#начальное условие

for i **from** 0 **to** N_i **do** $u0[i] := u_l + (u_r - u_l) \cdot 2 \cdot H(i \cdot h - l)$ **od**:

$N_{pl} := 4$:

количество временных шагов на графике, не считая начальное значение

$pl := \text{Array}[0 .. N_{pl}]$:

массив для нескольких временных шагов на графике

$pl[0] := \text{listplot}([seq([i \cdot h, u0[i]], i = 0 .. N_i)], \text{style} = \text{point})$:

$\tau := \frac{h \cdot 0.5}{|v|}$:# временной шаг (из условия Куранта)

$period := \frac{Time}{N_{pl}}$:#период вывода данных

$ipl := 1$:#счетчик для графиков

$n := 1$:#номер временного шага

while $n \cdot \tau \leq Time$ **do**

for i **from** 0 **to** $N_i - 1$ **do** $u1[i] := u0[i] - \frac{\tau \cdot v}{h} \cdot (u0[i + 1] - u0[i])$ **od**:

$n := n + 1$:

for i **from** 0 **to** $N_i - 1$ **do** $u0[i] := u1[i]$ **od**:

if $(n \cdot \tau \geq ipl \cdot period)$ **then**

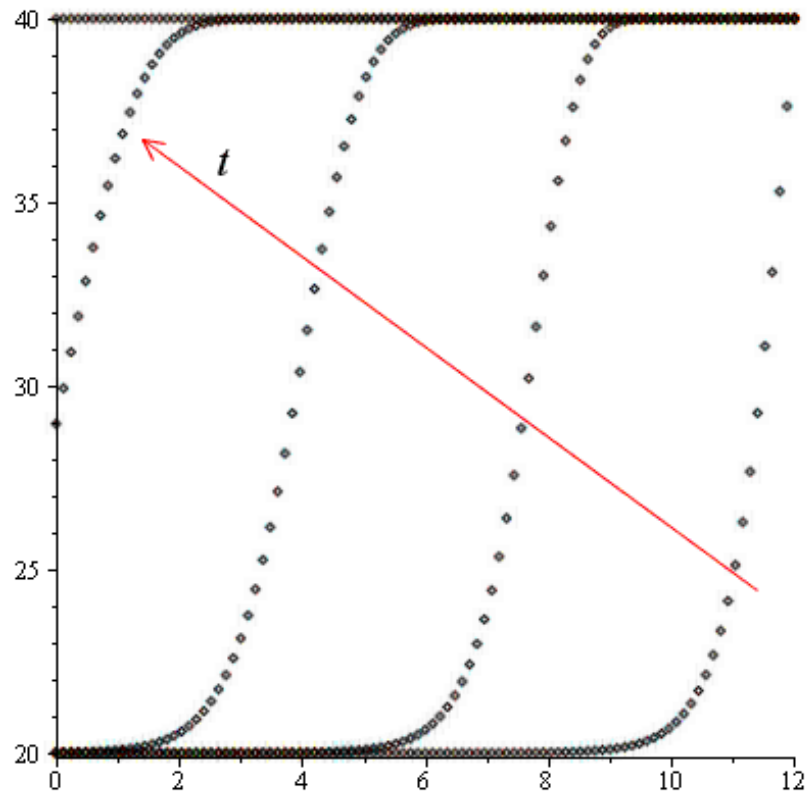
$pl[ipl] := \text{listplot}([seq([i \cdot h, u0[i]], i = 0 .. N_i)], \text{style} = \text{point})$:

$ipl := ipl + 1$:

fi

od:

$display(seq(pl[ipl], ipl = 0 .. N_{pl}))$



$ans := pdsolve(eq)$

$$U(x, t) = _F1(x + t)$$

$$bc := U(x, 0) = ul + (ur - ul) \cdot 2 \cdot H\left(\frac{-x}{v} - l\right) :$$

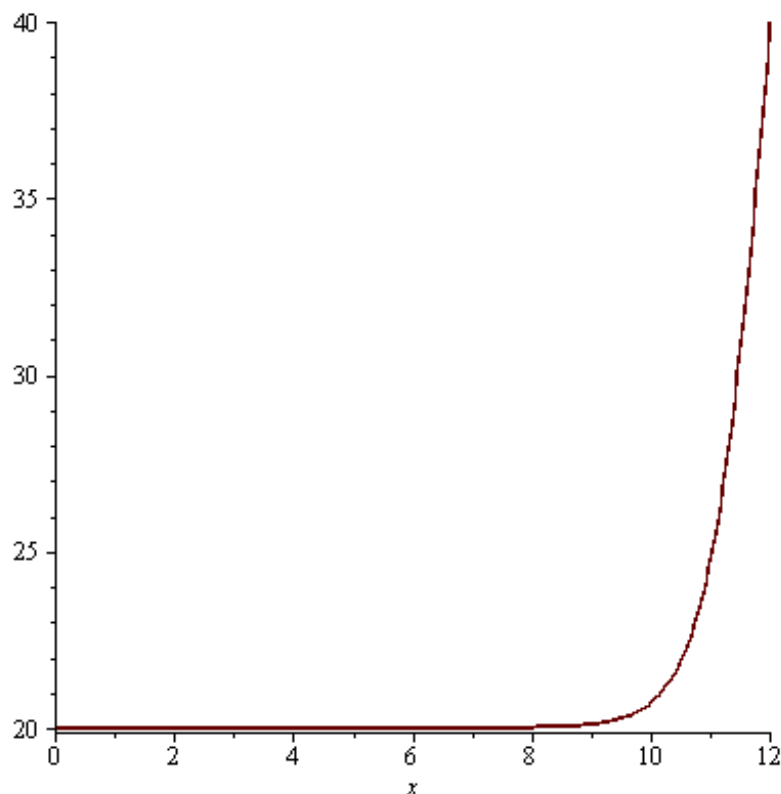
$sys := [eq, bc] :$

$ans := pdsolve(sys)$

$$U(x, t) = \frac{60. + 20. \cdot e^{-2. \cdot x - 2. \cdot t + 24.}}{1. + e^{-2. \cdot x - 2. \cdot t + 24.}}$$

$$Ua := (x, t) \rightarrow \frac{ur + ul + ul \cdot e^{-2. \cdot t - 2. \cdot x + 24.}}{1. + e^{-2. \cdot t - 2. \cdot x + 24.}} :$$

$plot(Ua(x, 0.0 \cdot Time), x = 0.0 .. l)$



`animate(plot, [  $Ua(x, t)$ ,  $x = 0.0 \dots l$ ],  $t = 0.0 \dots Time$ )`

Также в листинге 1 приводится аналитическое решение рассматриваемой задачи. В пакете Maple также можно просмотреть визуализацию результатов расчета, генерируемую функцией *animate*.

Задание. Напишите разностную схему и алгоритм, который будет работать как для отрицательных, так и для положительных значений v .

http://www.kimrt.ru/index/course_stm/0-24

Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры 2020/2021 благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина.

Источники

1. Finite difference method.
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method
2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. http://crecs.ru/ru/numlabs2/Advect_index.html

<http://www.kimrt.ru>